



No. of Printed Pages : 7

8312533

Serial No.

GLCT – 06
2020
गणित
MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घंटे]

Time Allowed : Three Hours]

[अधिकतम अंक : 300

[Maximum Marks : 300

- नोट : (1) कुल 20 प्रश्न दिए गए हैं एवं सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। खण्ड - अ से 05 प्रश्न सामान्य उत्तरीय हैं, खण्ड - ब से 05 प्रश्न लघु उत्तरीय हैं, तथा खण्ड - स से 10 प्रश्न अति लघु उत्तरीय हैं। प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में मुद्रित हैं।
- (2) प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिये गये हैं।
- (3) उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गये किसी पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दे।

- Note : (1) There are 20 questions and all questions are compulsory. Section – A consists of 05 general answer questions, Section – B consists of 05 short answer questions, Section – C consists 10 very short answer questions. The questions are printed both in Hindi and English.
- (2) The number of marks carried by every question/part is indicated against it.
- (3) Any page or portion of the page left blank in the answer booklet must be clearly struck-off.

खण्ड – अ/SECTION – A

1. मानिये कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$, एक A पर संबंध R परिभाषित किया गया है। A पर संबंध R को रखने वाले न्यूनतम संक्रमक संबंध R^* को ज्ञात कीजिये।

25

Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and let R be a relation on A defined by $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$. Find the smallest transitive relation R^* on A containing R .



2. मान लीजिए कि U तथा V , एक ही क्षेत्र F पर, सदिश समष्टियाँ हैं तथा T , U से V पर, एक रेखिक रूपान्तरण है। U एक परिमित विमाय हो, तो सिद्ध कीजिये कि रैंक (T) + नल्लिटी (T) = विमा (U) .

25

Let U and V be vector spaces over the same field F and let T be a linear transformation from U into V . Suppose U is finite dimensional, then prove that Rank (T) + Nullity (T) = $\dim(U)$.

3. (a) क्षैतिज दिशा से β कोण पर झुके हुये किसी समतल की तलों से कोई पिंड क्षैतिज तल से α कोण की दिशा में प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि यह समतल को समकोण पर आघात करता है, तो सिद्ध कीजिये कि $\cot \beta = 2 \tan(\alpha - \beta)$.

15

A particle is projected at an angle α with the horizontal from the foot of the plane, whose inclination to the horizontal is β . If it strikes the plane at right-angle then prove that $\cot \beta = 2 \tan(\alpha - \beta)$.

- (b) सिद्ध कीजिये कि किसी अचर बल के अधीन चलने वाले m संहति के एक कण की औसत गतिज ऊर्जा किसी समय के अन्तराल में $\frac{1}{6}m(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)$ होगी, यदि u_1 तथा u_2 प्रारंभिक और अंतिम वेग हों। यह भी सिद्ध कीजिये कि यह उस समय के अन्तराल के मध्य की गतिज ऊर्जा से ज्यादा तथा अर्द्धमार्ग की गतिज ऊर्जा से कम है।

10

Prove that the mean kinetic energy of a particle of mass m moving under a constant force in any interval of time is $\frac{1}{6}m(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)$, where u_1 and u_2 are initial and final velocity. Prove further that it is greater than the kinetic energy at the middle of the interval but less than that when the particle is half way.

4. (a) रेखाओं $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-6}{4}$ के मध्य न्यूनतम दूरी (shortest distance) तथा न्यूनतम दूरी की रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

15

Find the length of shortest distance and equations to the line of shortest

distance between the lines $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-6}{4}$.

- (b) समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, निर्देशांक अक्षों पर A, B, C में मिलता है। सिद्ध कीजिये कि मूलबिन्दु O

को वृत्त ABC से मिलानेवाली रेखाओं से जनित शंकु का समीकरण

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0 \text{ है।} \quad 10$$

The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axes in A, B, C. Prove that the

equation of the cone generated by lines through origin O to meet the circle ABC is

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0.$$

5. (a) एक फलन $f(x)$ निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जबकि } x \neq 0 \\ 2, & \text{जबकि } x = 0 \end{cases}$$

क्या जब $x \rightarrow 0$ तो $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व होता है? क्या फलन $f(x)$, $x = 0$, पर सतत है? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

10

A function $f(x)$ is defined as

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \neq 0 \\ 2, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

Does the limit of $f(x)$ as $x \rightarrow 0$ exist? Is the function $f(x)$ continuous at $x = 0$?

Justify your answer.

- (b) x-अक्ष, रेखा $x = y\sqrt{3}$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ से प्रथम पाद में परिवद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

15

Find the area in the first quadrant enclosed by the x-axis, the line $x = y\sqrt{3}$ and the circle $x^2 + y^2 = 4$.



खण्ड - ब / SECTION - B

6. सिद्ध कीजिये कि एक समूह G के सभी अंतरीय स्वाकारिताओं का समूह $I(G)$, विभाग समूह G/Z के तुल्यकारी होता है जहाँ Z , समूह G का केन्द्र है। 15

Prove that the group $I(G)$ of all inner automorphisms of a group G is isomorphic to the quotient group G/Z of G , where Z is the centre of G .

7. $[0, 1]$ पर एक फलन $f(x)$ की परिभाषा $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \\ 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$ द्वारा दी गई है। निम्न रिमान

समाकल $\int_0^1 f(x)dx$ तथा उच्च रिमान समाकल $\int_0^1 f(x)dx$ का मान ज्ञात कीजिये। 15

Let $f(x)$ be the function defined on $[0, 1]$ by $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x \text{ is irrational} \\ 1, & \text{when } x \text{ is rational} \end{cases}$

Calculate lower Riemann integral $\int_0^1 f(x)dx$ and upper Riemann integral $\int_0^1 f(x)dx$.

8. सभी $x > 0$ के लिये सिद्ध कीजिये कि $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$. 15

Prove that $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ for all $x > 0$.

9. एक सर्वत्रसम भारी और $2a$ लम्बी छड़ का कुछ भाग एक r त्रिज्या वाले चिकने क्षैतिज गोलार्ध कटोरे में है और शेष भाग उससे बाहर है। कटोरा तथा उसका किनारा दोनों क्षैतिज है। यदि छड़ तथा क्षैतिज के बीच कोण θ हो तो सिद्ध कीजिये कि $2r\cos 2\theta = a\cos\theta$. 15

A heavy uniform rod of length $2a$ rests partly within and partly outside a fixed smooth hemispherical bowl of radius r , the rim and bowl is horizontal. If θ be the inclination of the rod to horizontal, prove that $2r\cos 2\theta = a\cos\theta$.

10. मान लीजिये कि N तथा I क्रमशः प्राकृत संख्याओं के समुच्चय तथा पूर्णांक संख्याओं के समुच्चय है।

$$\text{एक फलन } f : N \rightarrow I \text{ पर } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1), & \text{if } n \text{ is odd} \\ -\frac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \text{ द्वारा परिभाषित किया जाता है। दिखाइये}$$

कि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

15

Let N and I be the sets of natural numbers and integers respectively. Define a map $f : N \rightarrow I$ by setting

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1), & \text{if } n \text{ is odd} \\ -\frac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

Show that the map f is one-one and onto.

खण्ड - स/SECTION - C

11. मान लीजिये कि G एक समूह है, जहाँ $G \neq \{e\}$ । सिद्ध कीजिये कि G कोई उचित उपसमूह नहीं रखता यदि और केवल यदि G एक अभाज्य कोटि का परिमित चक्रीय समूह है।

10

Let G be a group where $G \neq \{e\}$. Prove that G has no proper subgroups if and only if G is a finite cyclic group of prime order.

12. λ के किन मानों के लिये समीकरणों

$$3x - y + \lambda z = 1$$

$$2x + y + z = 2$$

$$x + 2y - \lambda z = -1$$

का अद्वितीय हल नहीं होता है ?

10

For what values of λ will the following equations

$$3x - y + \lambda z = 1$$

$$2x + y + z = 2$$

$$x + 2y - \lambda z = -1$$

do not have unique solution ?



13. दिखाइये कि $T(a, b) = (a + b, a - b, b)$ द्वारा परिभाषित फलन $T : R^2(R) \rightarrow R^3(R)$ एक $R^2(R)$ से $R^3(R)$ पर रैखिक रूपान्तरण है। T का परिसर (range), रैंक, शून्य समष्टि तथा शून्यता ज्ञात करो। 10

Show that the mapping $T : R^2(R) \rightarrow R^3(R)$ defined by $T(a, b) = (a + b, a - b, b)$ is a linear transformation from $R^2(R)$ into $R^3(R)$. Find the range, rank, null space and nullity of T .

14. अवकल समीकरण $(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$ को हल कीजिये। 10
Solve the differential equation $(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$.

15. समान क्रम की दो वर्ग आव्यूह A तथा B ऐसी है कि $A^2 = I$ तथा $B^2 = I$, जहाँ I इकाई आव्यूह है। यदि $|A| + |B| = 0$ तो $|A + B|$ का मान ज्ञात कीजिये, यहाँ $|A|$ आव्यूह A का सारणिक मान प्रदर्शित करता है। 10

There are two square matrices A and B of same order such that $A^2 = I$ and $B^2 = I$, where I is a unit matrix. If $|A| + |B| = 0$ then find the value of $|A + B|$, here $|A|$ denotes the determinant of matrix A .

16. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right)$ का मान शून्य हो तो a तथा b का मान ज्ञात करो। 10

If $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right)$ is equal to zero then find the values of a and b .

17. निम्नलिखित श्रेणी का n पदों तक का योग ज्ञात कीजिये :

$$1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + \dots \text{ n पदों तक।} \quad 10$$

Find the sum of the following series upto n terms :

$$1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + \dots \text{ upto } n \text{ terms.}$$

18. सिद्ध कीजिये कि $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{(\frac{n}{2})+1} \cos \frac{n\pi}{4}$, जहाँ n एक पूर्णांक है। 10

Prove that $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{(\frac{n}{2})+1} \cos \frac{n\pi}{4}$; where n is an integer.

EXAMPLE
 $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ का मान ज्ञात कीजिये, जहाँ $\vec{F} = 4xy \vec{i} + yz \vec{j} - xz \vec{k}$ तथा S , तलों $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ से परिबद्ध घन का पृष्ठ है तथा \vec{n} पृष्ठ S पर बाहर की तरफ अभिलम्ब दिशा में इकाई सदिश है।

Evaluate $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, where $\vec{F} = 4xy \vec{i} + yz \vec{j} - xz \vec{k}$ and S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ and \vec{n} is the unit outward drawn normal vector to the surface S . 10

वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ के बिन्दु $(2, 3)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिये। 10

Find the equation of the normal at the point $(2, 3)$ on the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$.

No. of Printed Pages : 3

8204997

Serial No.

GLCT – 51 2020

सामान्य हिन्दी एवं निबन्ध GENERAL HINDI AND ESSAY

[निर्धारित समय : दो घंटे]

[Time Allowed : Two Hours]

[अधिकतम अंक : 100
[Maximum Marks : 100]

- विशेष अनुदेश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
(ii) सभी प्रश्नों के निर्धारित अंक उनके सामने लिखे हैं ।
(iii) निर्धारित स्थान को छोड़कर अन्यत्र कहीं भी अनुक्रमांक और नाम, पता, टेलीफोन नम्बर आदि न लिखें ।

- Specific Instructions :** (i) All questions are compulsory.
(ii) Marks allotted for all questions is indicated against it.
(iii) Do not write your Roll No., Name, Address, Telephone No. etc. in any other space except space allowed for it.

प्रथम खण्ड

1. नीचे दिये गए अवतरण को ध्यानपूर्वक पढ़िये एवं उससे संबन्धित प्रश्नों के उत्तर दीजिये :

एक महान यथार्थवादी लेखक की यह विशेषता होती है कि उसके द्वारा अर्जित परिस्थितियों और चरित्र का स्वाभाविक कलात्मक विकास यदि उसके स्वयं अपने प्रिय पूर्वाग्रहों और पवित्र विश्वासों से टकराता है, तो लेखक अपने पूर्वाग्रहों और विश्वासों को त्यागने में एक ऋण भी नहीं हिचकता । वह वर्णन करता है उस यथार्थ समाज का जिसे वह देखता है, न कि उस आदर्श-समाज का जिसे वह देखना चाहता है । अपने मनोगत विश्व-दृष्टि या दर्शन के प्रति इस प्रकार की निर्ममता ही सभी प्रथम कोटि के यथार्थवादियों की महत्ता की कुंजी है जो उन्हें उन द्वितीय श्रेणी के लेखकों से अलग करती है, जो अपने सामाजिक दृष्टिकोण या विश्व-दर्शन तथा वस्तु-स्थिति में जबर्दस्ती सामंजस्य स्थापित करते हैं । महान यथार्थवादियों द्वारा सर्जित चरित्र एक बार अपने जन्मदाता की कल्पना से जीवन पाकर, तत्पश्चात्, उससे मुक्त होकर अपना जीवन मार्ग स्वयं निर्धारित करते हैं । उनका क्रिया-कलाप, उनका विकास, उनका भविष्य अपने जन्मदाता की इच्छा शक्ति

द्वारा नहीं बल्कि अपने सामाजिक और व्यक्तिगत जीवन के अन्तर्द्वन्द्वों और अन्तर्विरोधों द्वारा प्रेरित होता है। सच्चा यथार्थवादी या सचमुच में श्रेष्ठ लेखक उसे नहीं कहा जा सकता जिस लेखक के चरित्रों का विकास स्वयं उस लेखक की इच्छा पर निर्भर करता है।

- (अ) गद्यांश की व्याख्या कीजिए। 4
- (ब) एक श्रेष्ठ लेखक की विशेषताओं पर प्रकाश डालिए। 4
- (स) इस अवतरण का उचित शीर्षक दीजिए। 2
- (द) गद्यांश का मूल-भाव संक्षेप में प्रस्तुत कीजिए। 10
2. निम्नलिखित वाक्यों को शुद्ध कीजिए। (1×5=5)
- (अ) इतनी रात गई आप कहाँ थे ?
- (ब) बालक सोती नींद से जाग उठा।
- (स) हमारे पाठ्यक्रम के दो भाग हुए हैं।
- (द) मेरा लक्ष्य केवल विद्या प्राप्ति होगी।
- (ञ) सावित्री, जो सत्यवान की पत्नी थी, वह एक पतिव्रता नारी थी।
3. निम्नलिखित शब्दों के एक-एक बहुप्रचलित पर्याय शब्द लिखिए। (1×5=5)
- (अ) अर्क
- (ब) मार्तण्ड
- (स) आगंतुक
- (द) पय
- (ञ) वृत्ति
4. निम्नलिखित मुहावरों और लोकोक्तियों का अर्थ स्पष्ट करते हुए वाक्यों में प्रयोग कीजिए। (1×5=5)
- (अ) एक और एक ग्यारह होना
- (ब) चाँदी का जूता पहनाना
- (स) थाली का बैंगन
- (द) कबहुँ निरामिश होय न कागा
- (ञ) जंगल में मोर नाचा किसने देखा



5. निम्नलिखित समस्त पदों का विग्रह कीजिए तथा समास का नाम भी लिखिए ।

(1×5=5)

(अ) लक्ष्यभ्रष्ट

(ब) सुमुखी

(स) जल-वायु

(द) यथाविधि

(ज) अध्वतोद्गार

6. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1×5=5)

(अ) भक्तिकाल के एक ऐसे प्रमुख कवि का नाम लिखिए जिन्होंने उत्तर प्रदेश की दो मुख्य बोलियों में रचनाएँ की हों ।

(ब) 'गधा' का तत्सम रूप लिखिए ।

(स) शृंग का तद्भव रूप लिखिए ।

(द) पयोद का संधिविच्छेद कीजिए ।

(ज) प्रेरणार्थक क्रिया का एक उदाहरण दीजिए ।

7. निम्नलिखित शब्दों के शुद्ध रूप लिखिए ।

(1×5=5)

(अ) दुरावस्था

(ब) साम्यता

(स) चिन्ह

(द) पैत्रिक

(ज) अभीष्ट

द्वितीय खण्ड

(हिन्दी निबन्ध)

निम्नलिखित में से किसी एक विषय पर निबन्ध लिखिए । इस निबंध की अधिकतम विस्तार सीमा 1000 शब्द होगी । 50

1. विज्ञान की सामाजिकता ।
2. भूखलन : कारण एवं परिणाम ।
3. सांस्कृतिक बहुलता : अर्थ एवं भूमिका ।
4. गद्य : जीवन-संग्राम की भाषा ।
5. नागरिक-निजता अधिकार : मूल्य एवं महत्त्व ।
6. आज़ादी का अमृत महोत्सव ।